B/ n=1

$f(x)=f_1(x)=x^3+3x-2$

$\alpha=x_1$

1) $\varphi(x)=-\frac{f(x)}{f'(x)}+x \qquad x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$

a) $\varphi(x)=x-\frac{x^3+3x-2}{3x^2+3}=\frac{2x^3+2}{3(x^2+1)}=\frac{2}{3}.\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)$

pour $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right] \Rightarrow 0\le x\le 1$

$\Rightarrow 0\le x^3\le x^2 \Rightarrow 0<1+x^3\le 1+x^2 \Rightarrow 0\le\frac{1+x^3}{1+x^2}\le 1$

$\Rightarrow 0\le\frac{2}{3}\left(\frac{1+x^3}{1+x^2}\right)\le\frac{2}{3}\Rightarrow 0\le\varphi(x)\le\frac{2}{3}$

φ est continue sur $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ d'où $\varphi\left(\left[0,\frac{2}{3}\right]\right)\subset\left[0,\frac{2}{3}\right]$

b) $\varphi(x)-\alpha=(x-\alpha)^2\frac{(2x+\alpha)}{3(x^2+1)}$. *on* a : $f(\alpha)=0$

$$\varphi(x)-\alpha=x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\alpha+\frac{f(\alpha)}{f'(x)}=(x-\alpha)-\frac{f(x)-f(\alpha)}{f'(x)}$$

$$=(x-\alpha)-\frac{(x^3-\alpha^3)+3(x-\alpha)}{3(1+x^2)}$$

$$=(x-\alpha)-\frac{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2+3)}{3(1+x^2)}$$

$$=(x-\alpha).\left[1-\frac{(x^2+\alpha x+\alpha^2+3)}{3(1+x^2)}\right]$$

$$=(x-\alpha).\frac{2x^2-\alpha x-\alpha^2}{3(1+x^2)}$$

$$=(x-\alpha).\frac{2x^2+\alpha x-(2\alpha x+\alpha^2)}{3(1+x^2)}$$

$$=\frac{(x-\alpha)}{3(1+x^2)}.[x(2x+\alpha)-\alpha(2x+\alpha)]$$

$$=\frac{(x-\alpha)(x-\alpha)(2x+\alpha)}{3(1+x^2)}=\frac{(x-\alpha)^2(2x+\alpha)}{3(1+x^2)}$$

c) $0\le x\le\frac{2}{3}$ et $0\le\alpha\le\frac{2}{3}$

$\Rightarrow|x-\alpha|\le\frac{2}{3}$

$0\le 2x\le\frac{4}{3}\Rightarrow 0\le 2x+\alpha\le 2$

$\Rightarrow(2x+\alpha)|x-\alpha|\le\frac{4}{3}$

$1+x^2\ge 1\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}\le 1\Rightarrow\frac{1}{3(1+x^2)}\le\frac{1}{3}$

d'où $\frac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(1+x^2)}\le\frac{4}{9}\le\frac{2}{3}$

d) $|\varphi(x)-\alpha|=\frac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(1+x^2)}.|x-\alpha|$

or $\frac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(1+x^2)}\le\frac{2}{3}$

d'où $|\varphi(x)-\alpha|\le\frac{2}{3}|x-\alpha|$

2) $\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=\varphi(U_n)\end{cases}$

a) * pour n=0 , $0\le U_0\le\frac{2}{3}$ (vrai)

* supposons que : $0\le U_n\le\frac{2}{3}$

* montrons que : $0\le U_{n+1}\le\frac{2}{3}$

$U_n\in\left[0,\frac{2}{3}\right]\Rightarrow\varphi(U_n)\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$ d'aprés B/1)a)

$\Rightarrow U_{n+1}\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$

conclusion : $0\le U_n\le\frac{2}{3}$; $\forall\, n\in\mathbb{N}$

b) d'aprés 1) d) $|\varphi(U_n)-\alpha|\le\frac{2}{3}|U_n-\alpha|$

$\Rightarrow|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{2}{3}|U_n-\alpha|$

c) $|U_1-\alpha|\le\frac{2}{3}|U_0-\alpha|$

$|U_2-\alpha|\le\frac{2}{3}|U_1-\alpha|$

.....

.....

$|U_n-\alpha|\le\frac{2}{3}|U_{n-1}-\alpha|$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn